第 1 章　量子力学の定式化

ーーとある休日の昼下がり

ココアさんココアさん、「量子力学」ってなんですか？

えっ？ 量子力学っていったら物理学の一分野だけど……

ココアさんは分かりますか？

えーっと…… 初歩的なことだけだけれど一応分かる、かな。

じゃあ教えてほしいです……！

それはもちろん。だけど、突然どうしたの？

それは……いや、なんでもないです。とにかく教えてください……！

うーん…… まあいっか。お姉ちゃんにまっかせなさい！

1.1　状態と重ね合わせ

じゃあ、最初は「状態」っていう概念について話そっかな。

状態？

うーんとねえ…… そうだ、例えばこんなかんじかな。

例 1.1.1　箱の中にティッピーがいる状態を $|A\rangle$、いない状態を $|B\rangle$ とします。最初は箱は閉じていて、箱の中がどうなっているかは分かりません。箱を開けたとき、ティッピーはいるでしょうか、いないでしょうか。

意味がわからないのですが……

そうだよね…… どうせ私の説明なんかがチノちゃんに届くことなんてないんだよね……しくしく

ココアさん、そんな意味じゃありませんからちゃんと説明してください。

……うん。えっとね、こういう箱を用意したとすると、きっとチノちゃんはこう思うよね。「箱にティッピーがいるかどうかなんて、最初にココアさんが入れたかどうかで決まるだけです。ココアさんがティッピーを箱に閉じ込めていたら開けたときもティッピーはいるし、そうでなかったらいないだけです」って。

……そうですね。そうなると思います。（私のまねはすこし納得がいきませんが）

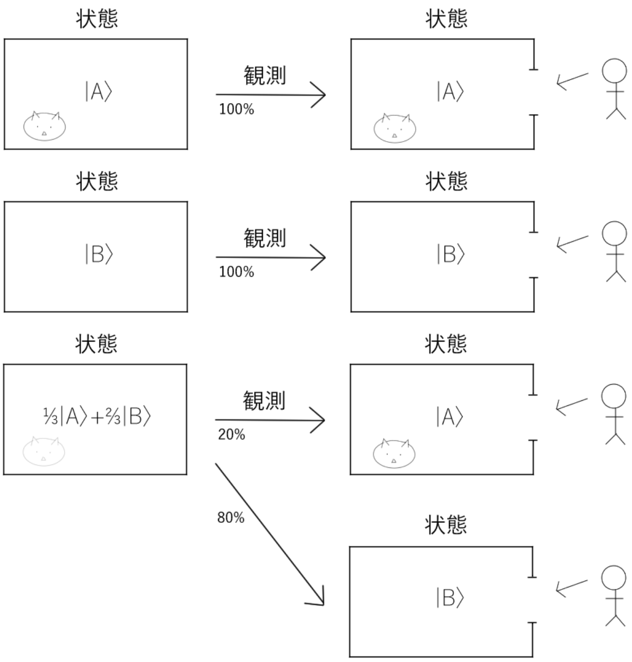

図 1.1　状態の重ね合わせ


ここで、私が最初にどういう状態を用意したかによる、っていうのはまあそうなんだけれど、暗黙の裡に こういう仮定もしているよね：「箱の中の状態は $|A\rangle$ か $|B\rangle$ かのどちらかである」。実は量子論ではこれが成り立たないんだよ。


といいますと？


「箱の中の状態は $|A\rangle$ と $|B\rangle$ だけではない。$\frac{1}{3}|A\rangle + \frac{2}{3}|B\rangle$ のように、これらの状態を適当な割合で混ぜ合わせた状態が存在する」


……ティッピーがいる状態といない状態のあいだの状態があるってことですか？ そんなのあり得ないです。だいいち、そんなところ誰も見たことがないじゃないですか。


じゃあ、こうするとどうかな？「閉じた箱の中の状態がどんなものであったとしても、箱が開けられた（観測された）瞬間に箱の中の状態は $|A\rangle$ か $|B\rangle$ のどちらかに“飛び移る”。このときどちらに飛び移るかは、元の状態によって確率的に決まる」。こうすれば、人が見られるのはティッピーがいる状態かいない状態かのどちらかだけになるよね。


ええっと…………そうなる……でしょうか？


絵にしてみるとこんな感じだよ（図 1.1）。


ふむふむ……絵になるとわかりやすいです…！ 確かにこうやって考えてしまえば、人が見られるのはティッピーがいる状態かいない状態かの２通りになりますね。でも、誰も見ることのできない箱の中の「状

態」がこうなっていて、しかもそれを観測したら確率的に状態が移るなんて、確かめようがないじゃないですか。これが正しいってどうしていえるんですか？


それはね、「こうやって考えて理論を組み立てたら、それに従って計算した結果が実験結果と合うから」だよ。本当にこうなっているかはわからないけれど、そういう模型を考えたときうまく現実世界の現象を説明できるならそれでいいんだよ。


そういうものなんですか。


物理学は数学と違って自然科学だからね。数学や論理学は本当の意味で自由だけれど、物理学は「自然のしくみを記述すること」が目標だから、自然を説明できること、つまり実験と合うことが一番なの。


じゃあ、いったいどういう実験結果を説明するために、こんな変な考え方をするようにしたんですか…？


たとえば、「電子の二重スリット実験」とか、「シュテルン・ゲルラッハの実験」とかが分かりやすくていいかなぁ。歴史的には黒体輻射についてのプランクの法則の説明なんてのも大事なんだけれど、統計力学を知らないと分かりづらいかもしれないから。ただ、ここで詳しく説明するよりも、チノちゃんが自分で調べてみてくれたほうがいいかな。そのほうが、歴史の物語もわかって面白いと思うから。


わかりました…！


朝永博士の「光子の裁判」なんかがお勧めだよ。ここでは、量子論で記述される簡単な例として電子のスピンを挙げておくね。

例 1.1.2 電子はスピンとよばれる自由度（属性）をもっています。これは回転（角運動量）のようなもので、いろいろな向きを向いていますが、これを観測すると「上向き」か「下向き」かの 2 通りになってしまいます。例えば適当に x, y, z 軸を決めて、z 方向のスピン（これを以下 s_z とします）を測定すると、測定結果は $s_z = \frac{1}{2}$（上向き）か $s_z = -\frac{1}{2}$（下向き）かの 2 通りになります（図 1.2 参照）。


スピン……初めて聞きました。


まあ、スピンは量子論のなかから出てきたものだからね。でも、スピンは磁力の源でもあるし、ここではそういうものがあると思って聞いてほしいかな。


$s_z = \pm\frac{1}{2}$ ということですが、このとき別の、例えば x 軸方向のスピンはどうなるんですか？ この図をみると両方とも $s_x = 0$ になっているみたいですが、そうしてしまうと軸の決め方で結果が変わってしまいますよね。


ふっふっふ、チノちゃんもいい所に気づいたね。これも量子論の不思議なところなんだけれど、実は「s_z と s_x は同時に測定できない」んだよ。


同時に測定できない……？ そんなことがあるんですか……


これを示すのがさっきの「シュテルン・ゲルラッハの実験」なんだけど、このあたりはおいおい話していくよ。まずは一般論を先に話していくことにするね。

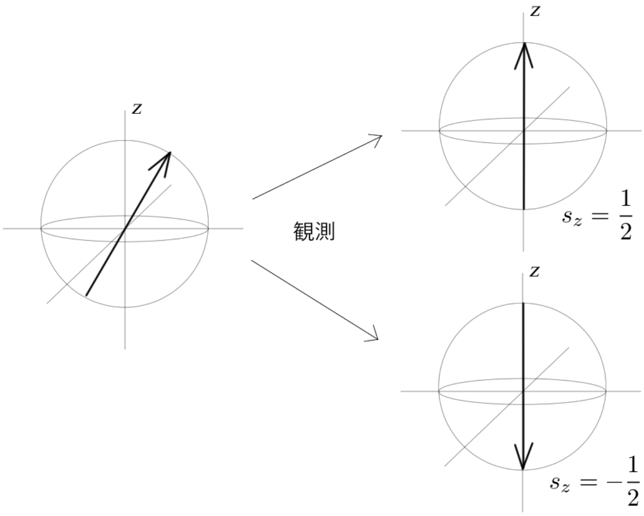

図 1.2　電子のスピン

1.2　状態とブラ

仮定 1.2.1　状態は、$|A\rangle, |B\rangle, \ldots$ のように文字のまわりに $|\rangle$ をつけたものを用いて表す。これらをケットという。

これはさっき言ったのと同じことだから大丈夫だよね。それで、次が「重ね合わせ」についての大事な仮定だよ。

仮定 1.2.2　ケットは複素数 $\boldsymbol{C}$ を係数とするベクトルである。つまり、ケット $|A_1\rangle, |A_2\rangle$ があるとき、その線型結合 $|B\rangle := c_1 |A_1\rangle + c_2 |A_2\rangle$ もケットであり状態を表す（但し $c_1, c_2 \in \boldsymbol{C}$）。このとき、$|B\rangle$ の表す状態は $|A_1\rangle$ の表す状態と $|A_2\rangle$ の表す状態の重ね合わせであるという。

仮定 1.2.3　同じ状態は複数重ね合わせても別の状態にはならない。つまり、ケット $|A\rangle$ について、その（0 でない）スカラー倍 $c|A\rangle$ は $|A\rangle$ と同じ状態を表す $(c \in \boldsymbol{C},\ c \neq 0)$。

「状態の重ね合わせの性質はベクトルを使うと綺麗に表せる」これが大事なところだよ！ チノちゃんは抽象的な「ベクトル」については大丈夫？

数を並べた「ベクトル」を一般化した、いくつかの線型性についての公理をみたすようなもののことです

よね[*1]。


うん。それが分かっていれば大丈夫。「重ねあわせ」が「線型」という性質を要求するから、ベクトルを使って状態を表すことにしたってことだよ。ただ、ケットの空間はたいていの場合無限次元になるから注意しておいてね。あと、ケットの空間もベクトル空間だから、当然零ベクトル（零ケット）0 が存在するんだけど、これについては「零ベクトル 0 はどんな状態も表さない」と決めるよ。なんでかわかるかな？


（ベクトル空間の公理の一覧を見ながら）えーっと……あ、$|A\rangle + 0 = |A\rangle$ が任意の $|A\rangle$ について成り立たないといけなくて、それとさっきの状態の重ね合わせの仮定とをあわせると、0 が状態を表しているとダメだってわかります…！


うん、そういうことだね。じゃあここで、さっきのスピンの例をみてみようか。

例 1.2.4 (電子のスピン)　電子が 1 個ある系を考えます。スピン $s_z = \frac{1}{2}$ の状態を表すケットを $|1\rangle$、スピン $s_z = -\frac{1}{2}$ の状態を表すケットを $|0\rangle$ と定義しましょう。すると、$2|1\rangle$ や $-5|1\rangle$ は $s_z = \frac{1}{2}$ の状態であり、$2|1\rangle + 4|0\rangle$ は $s_z = \frac{1}{2}$ の状態と $s_z = -\frac{1}{2}$ の状態が重ねあわされた状態を表します。


電子のスピンは具体的な対象だけれど、もっと抽象的な系を考えることもできるよ。熱の伝導と物質の拡散は全然違うように見える性質だけれど、抽象的なモデルにすると同じように扱えるよね。そんなかんじ。

例 1.2.5 (1 量子ビット系)　$|1\rangle$ と $|0\rangle$ の 2 つの状態があり、すべての状態がこれらの重ね合わせで表されるような系を総称して 1 量子ビット系といいます。これが量子論のもっとも簡単な模型です。


ところでチノちゃん、1 量子ビット系の自由度、つまり異なる状態の数はどれくらいかわかる？


ええと、$|B\rangle = c_1 |A_1\rangle + c_2 |A_2\rangle$ の c_1 と c_2 がそれぞれ複素数の自由な値をとれるから、$\boldsymbol{C}^2$ ですか？


それだと「スカラー倍したケットは同じ状態を表す」っていうのを忘れてるよ！


あ、そういえばそうですね。じゃあ右辺を c_1 でくくって $|B\rangle = c_1(|A_1\rangle + \frac{c_2}{c_1} |A_2\rangle)$ として、$\frac{c_2}{c_1}$ が変数と思えば自由度が $\boldsymbol{C}$ とわかります…！


残念でした～ それも $c_1 = 0$ のときが入ってないよ。


うっ私としたことがうっかりしていました……


というわけで、1 量子ビット系の状態の自由度は $\boldsymbol{C}$ に $c_1 = 0$ のときに対応する ∞ を足して、$\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ だよ。


無限大…？　そんなものを使って大丈夫なんですか


うーん。ここでは大丈夫とだけ言っておこうかな。無限大を足しておくと嬉しいこととして、状態を単位

*1 詳細は [6] などを参照ください。

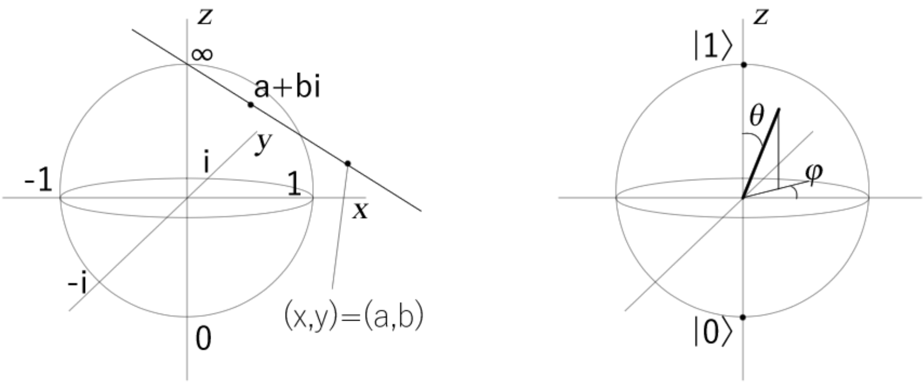

図 1.3　射影空間（左）とブロッホ球（右）

球面（3 次元ユークリッド空間の半径 1 の球面）上の点としてあらわすことができるというのがあるよ[*2]。

球面ですか？

図 1.3 左みたいに複素数平面をくるっと上に曲げると球がつくれるよね。ただ、一番上の点だけは無限遠点に対応するところだから複素数のなかでは収まらない。だから ∞ を足すんだ。

たしかに、そうやれば球面と一致しそうな気がします。

球面上の点で状態が表せるとなると、直観的だよね。単位球面上の点だから 2 つの実数で極座標表示することもできて、そういうのを「ブロッホ球」っていうよ。

そういえばココアさん、さっき聞きそびれていたのですが、そもそもなんでケットの係数は複素数なんですか？ 虚数が物理にでてくるなんて変に思えます。

実はそれも実験からの要請なんだ。今みたように係数が複素数だと 2 つの状態の重ね合わせで $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ のぶん、つまり $\boldsymbol{R}^2$ くらいの別の状態がつくれるよね。でも係数が実数だと $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ の状態しか作れない。現実の系では状態の自由度が前者になるらしいことが分かったから、係数は複素数にしたってこと。

これも公理というなら、疑問に思わず受け入れるしかないんですね。

まあそういうことになっちゃうかな。でも、この量子力学という理論ではこういう仮定を設けているというだけだから、現実世界をうまく記述する別の理論をつくろうというときは、もちろんこれを仮定しなくてもいいからね。

1.3　内積の導入

じゃあ、ベクトルがでてきたことだし次は内積を定義しよっか。

---

*2 詳しくは「リーマン球面」で調べるか、[7] などを参照してください。ここまでのことを少し数学らしい言葉でいうと、1 量子ビット系の自由度（定義から 1 次元複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^1$）と $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ と 2 次元球面 S^2 が同じもの（同相）であるということになります。

定義 1.3.1　ケット $|A\rangle$ と $|B\rangle$ の内積 $(|A\rangle, |B\rangle)$ を $\langle A||B\rangle$ のように表記することにする。内積はひとつの複素数になり、この演算は次の性質をみたす。

1. 線型性　$\langle A|\,(c_1\,|B_1\rangle + c_2\,|B_2\rangle) = c_1\,\langle A||B_1\rangle + c_2\,\langle A||B_2\rangle$
2. エルミート対称性　$\langle B||A\rangle = (\langle A||B\rangle)^*$　ただし * は複素共軛を表す。
3. 非負定値性　$\langle A||A\rangle \geq 0$　ただし $\langle A||A\rangle = 0$ となるのは $|A\rangle$ が零ケットである場合に限る。

定義 1.3.2　$\langle A||B\rangle$ のように縦線 2 本が連続する場合は $\langle A|B\rangle$ のように 1 本で略記する。


この書き方だと内積は存在することが前提みたいですが、そのあたりはいいんですか？


えっと…… うん、それも公理かな。これから先の量子力学のモデルを作るために内積は必要になってくるから。ちなみに、ちゃんと量子力学の公理を書こうとすると「複素係数ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元を状態という」あたりから始まることになるんだけど、このヒルベルト空間っていうのは「完備で内積をもつ線型空間」という意味なの。


ヒルベルト空間…… 難しそうです……


物理学者が感覚的に成り立つとしてしまう量子力学の計算をちゃんと正当化しようとすると、こういう少し難しい概念を持ってこないといけないんだよ…… 今回ここでは物理的なイメージを優先してあまりそういうところには触れないでおくから、細かい所はゆるしてほしいなっ。


はい。


内積の性質で注意しておいてほしいのは、エルミート対称性だよ。複素数 c に対して、$(|A\rangle, c\,|B\rangle) = c\,\langle A|B\rangle$ になるけど、一方 $(c\,|A\rangle, |B\rangle) = (|B\rangle, c\,|A\rangle)^* = (c\,\langle B|A\rangle)^* = c^*\,\langle A|B\rangle$ になるんだ。


後ろのほうのケットにかかっていたらそのまま前に出て、前のほうだったら複素共軛をとるんですね[*3]。


うん、そういうこと。で、こういうふうに内積があるとすると、「規格化」の操作を定めることができるよ。

定義 1.3.3　ある零でないケットとその零でないスカラー倍は同じ状態を表すから、ある状態に対応するケット $|A\rangle$ は $||\,|A\rangle\,|| := \sqrt{\langle A|A\rangle} = 1$ を満たすようにとることができる。このようにとったケットを「規格化されたケット」という。


$||c\,|A\rangle\,||^2 = c^*c\,\langle A|A\rangle = |c|^2\,\langle A|A\rangle$ になるから、もし $\langle A|A\rangle = a$ なら $|A'\rangle := a^{-\frac{1}{2}}\,|A\rangle$ とおけば、$\langle A'|A'\rangle = 1$ となるね。

[*3] $\langle A|B\rangle$ は「$|B\rangle$ を $\langle A|$ という写像で移したもの」と見ることができます。この $\langle A|$ はブラとよばれ、ブラの空間はケットの空間の双対空間になります。ディラックの量子力学の教科書などでは、双対空間の存在からブラを導入し、所謂「双対空間の内積」を用いて内積を導入するのですが、双対空間というものになじみのない方もいるでしょうから、ここではブラを導入しませんでした。ブラ-ケットの形式では、$|A\rangle$ と $|B\rangle$ の内積にあたるものとして、$|A\rangle$ に対応するブラ $\langle A|$ とケット $|B\rangle$ の積を用います。この場合、エルミート対称性について「ケット $c\,|A\rangle$ はブラ $c^*\,\langle A|$ に対応する」と簡単に表すことができます。

状態に関係するのはベクトルの向きだけだから、長さは 1 にそろえてしまおうってことですね…！

そう！ ただ、規格化しても状態を表すケットは一意に定まるわけじゃないから注意してね。実数 φ に対して、$\|e^{i\varphi}\,|A\rangle\| = \||A\rangle\|$ だから、$e^{i\varphi}$ をかけるだけの不定性があるよ。この $e^{i\varphi}$ を位相因子っていうの。

なるほどです。

1.4　一次演算子と物理量

今度はいよいよ「物理量」を導入するよ！ ……といいたいんだけれど、その前にちょっと準備だよ。

定義 1.4.1　ケットをケットに移す写像 $\hat{O}$ のうち、次のような性質をもつものを一次演算子という。

1. 線型性　$\hat{O}(c_1\,|A_1\rangle + c_2\,|A_2\rangle) = c_1\hat{O}\,|A_1\rangle + c_2\hat{O}\,|A_2\rangle$

定義 1.4.2　一次演算子 $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ の和、スカラー倍、積を次のように定義する。ただし、$|A\rangle$ は任意の複素数であるとする。

- 和　$(\hat{O}_1 + \hat{O}_2)\,|A\rangle := \hat{O}_1\,|A\rangle + \hat{O}_2\,|A\rangle$
- スカラー倍　$(c\hat{O}_1)\,|A\rangle := c(\hat{O}_1\,|A\rangle)$　ただし $c \in \boldsymbol{C}$
- 積　$(\hat{O}_1\hat{O}_2)\,|A\rangle := \hat{O}_1(\hat{O}_2\,|A\rangle)$

特に、積についてはこのように定義すれば結合性をもつことになるので、$\hat{O}_1\hat{O}_2\,|A\rangle$ のように括弧を省いて書くことができる。

また新しい概念がでてきてよくわからなくなってきました……

抽象的に書いてあるからそう感じちゃうかもしれないけど、「ケットは列ベクトル」「一次演算子は正方行列」みたいなものだと思ってしまえば、実はふつうの線型代数でやったことと同じなんだよ。

行列？

たとえば、n 次元列ベクトル v、n 次元正方行列 A があったときに、行列は列ベクトルに作用して Av っていう新しい列ベクトルをつくれるよね。

それはわかります。

じゃあ、ケット $|v\rangle$ と一次演算子 $\hat{A}$ があったとき、一次演算子がケットに作用したら新しいケット $\hat{A}\,|v\rangle$ ができる、というのは、ほら。

同じです……！

ね？ ただ、最初にも言ったけれど、ほとんどの場合で状態の空間は無限次元だから、こういう素朴な考

え方じゃあ上手くいかないこともあるよ。


それでも、これで随分わかりやすくなった気がします。


やっぱりイメージは大切だよね！ 次に固有ケット、固有値という概念を導入するけれど、これも行列と列ベクトルについての話と同じことだよ。

定義 1.4.3 一次演算子 $\hat{O}$、ケット $|A\rangle$、複素数 c について、$\hat{O}\,|A\rangle = c\,|A\rangle$ が成り立つとき、c を $\hat{O}$ の固有値、$|A\rangle$ を $\hat{O}$ の固有値 c に従属する固有ケットという。


で、いよいよ「物理量」が登場するよ。物理量っていうのは、最初のティッピーの例ででてきた「いる」「いない」とか、粒子の位置や運動量、スピンの状態とか。繰り返すけど、こういうものは古典論では測ってしまえば終わりだけれど、量子論では「状態」を「観測」したときに確率的に決まるんだ。

仮定 1.4.4 物理量は一次演算子である。物理量 $\hat{O}$ を観測したとき、状態が $\hat{O}$ の固有状態（$\hat{O}$ の固有ケットが表す状態）であれば、その測定値は必ず（＝確率 1 で）その固有状態が属する固有値になる。特に、ある物理量を観測したときに取り得る値は、その固有値の中にある。


ええっと………固有ベクトル、固有値………


うーん。じゃあ、言葉で言うよりも数式で言ってみようか。

命題 1.4.5 $|a_0\rangle$ が物理量 $\hat{a}$ の固有値 a_0 に属する規格化された固有ケットであるとき、次が成り立つ。

$$\langle a_0|\hat{a}|a_0\rangle = a_0$$


これの証明はできる？ あ、$\langle a_0|\hat{a}|a_0\rangle$ は $\langle a_0|\,(\hat{a}\,|a_0\rangle)$ という意味だよ。


$\langle a_0|\,(\hat{a}\,|a_0\rangle) = \langle a_0|\,(a_0\,|a_0\rangle) = a_0\,\langle a_0|a_0\rangle = a_0$ ですね。


これを使うと、仮定 1.4.4 の内容はこう言い換えられるよ。「物理量をその固有ベクトルで挟んで出た結果が測定値である」。


……なるほど。意外と式は簡単です。


今回、突然固有値 a_0 に属する固有ケットを $|a_0\rangle$ って同じ文字で書いたけれど、それは大丈夫かな。こういうふうに、固有ケットをそれが属する固有値を使って書くことがよくあるよ。


一瞬戸惑いましたけど大丈夫です。でも、同じ固有値に属する固有ケットがひとつでないときはどうするんですか？


あー、うん。たしかにそういうこともあるよね。そういうときは $|a_0^{(1)}\rangle, |a_0^{(2)}\rangle, \ldots$ というふうに分かるように区別すればいいかな。ただ、そうやってひとつの固有値に属する固有状態が複数ある場合を「縮退して

いる」というんだけど、ここから先では縮退している場合は扱わないようにするね。

わかりました。

1.5　実の物理量と観測量

というわけで、最低限「物理量」の定式化はしたわけだけれど、これだけだとあまりに一般的で使いづらいから、「物理量」にいくつかの制限を加えていくね。

まずは、観測した値が実数になるような制限だよ。物理量の多く、例えば位置とか運動量は観測したとき実数であってほしいよね。だから、物理量がそうなる条件を求めたいんだけれど、チノちゃんは、どういうときに観測した値が実数になるかわかる？

固有値が全部実数になるときですか？

うん、まあ、そうだよね………そうなんだけれど、………じゃあ、実数であるっていうことは、ある数と複素共軛な数が元の数と等しいってことなんだけれど、これを固有値に使うとどうなるかな？

うーんと。例えば命題 1.4.5 に使えば、$\langle a_0|\hat{a}|a_0\rangle = (\langle a_0|\hat{a}|a_0\rangle)^*$ で……複素共軛が内積の順序の入れ替えになるってことを使えば、$(|a_0\rangle, \hat{a}\,|a_0\rangle) = (\hat{a}\,|a_0\rangle, |a_0\rangle)$ と書けます…！

すごいよチノちゃん、私の言いたいことをちゃんとわかってくれるなんて、私とチノちゃんももう以心伝心だね！

だ、抱きつかないでください、ココアさん！　はーなれてくーださい……！

今のをまとめるとこうなるよ（もふもふー）。

定義 1.5.1　物理量 $\hat{a}$ について、任意のケット $|a\rangle$ に対し $(\hat{a}\,|a\rangle, |a\rangle) = (|a\rangle, \hat{a}\,|a\rangle)$ が成り立つとき、$\hat{a}$ はエルミートであるという。このとき、$\hat{a}$ の固有値はすべて実数である。

位置や運動量はエルミートなものでないと困るってことだね。

(やっと離れてくれました)

さらにさらに！　エルミートだとこんなことがいえるよ！

定理 1.5.2　エルミートな物理量 $\hat{a}$ について、次のことが成り立つ。
$\hat{a}\,|a_1\rangle = a_1\,|a_1\rangle$, $\hat{a}\,|a_2\rangle = a_2\,|a_2\rangle$ でありかつ $a_1 \neq a_2$ のとき、$|a_1\rangle$ と $|a_2\rangle$ は直交する。すなわち $\langle a_1|a_2\rangle = 0$ である。

言葉で言うと、異なる固有値に属する固有ケットは直交するってことだよ。

規格化しておけば正規直交基底になりそうです…！


……とは、すぐに言っちゃだめなんだよね。


えっ、たしか直交ならば一次独立なので、次元の数だけ集めれば基底がつくれるんじゃないですか？


そこが「無限次元」の難しいところなんだ。無限次元線型空間だと簡単に「次元の数だけ」とかいえないんだよ。でも、量子力学では「観測量（オブザーバブル）」（観測できる物理量）の固有ケットが基底になっていないと困るから、それを要請するの。

定義 1.5.3 実の物理量 $\hat{a}$ の固有ケット全体の集合がケットの空間の基底になっているとき、つまり、任意のケット $|B\rangle$ が $\hat{a}$ の固有ベクトルの集合 $\{|a_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって

$$|B\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \, |a_\lambda\rangle$$

と線形結合でかけるとき、$\hat{a}$ を観測量という。


……ふう。ここまで長かったけれど、これでようやく最初の「ティッピーがいる状態といない状態の重ね合わせ」の話ができるような道具が揃ったよ。


……？ どういう意味ですか。


つまり、定義 1.5.3 で、固有状態でない状態について語れるようになったんだよ。


たしかに、そういえば今までは固有状態以外の場合の物理量の観測結果についてなにもいってきませんでしたね。


じゃあここで、ものすごく大事な公理を話すね。

仮定 1.5.4 (確率解釈) $\hat{a}$ を観測量、a_0 を $\hat{a}$ の固有値のひとつ、$|a_0\rangle$ を a_0 に属する $\hat{a}$ の固有ケットとする。このとき、ケット $|B\rangle$ の表す状態を観測したとき系が $|a_0\rangle$ の表す固有状態に“飛び移る”確率 $P(a_0)$ は次のようにかける。

$$P(a_0) = |\langle a_0|B\rangle|^2$$

ただし、すべてのケットは規格化されているものとする。


なにか突然でてきたようにみえます……


ゆっくり考えてみるとそんなことはないよ。$|B\rangle$ が定義 1.5.3 のように展開されているとすると、固有ケットの直交性から $P(a_0) = |\langle a_0|(c_0\,|a_0\rangle)|^2 = |c_0|^2$ になるよね。じゃあ、もし $|B\rangle$ が固有ケットだったらどうなる？


えぇと、$|B\rangle = |a_0\rangle$ のときは $c_0 = 1$ なので $P(a_0) = 1$、それ以外の固有ケットのときは $c_0 = 0$ なので $P(a_0) = 0$ ……ちゃんと固有ケットの性質にあっています…！


直交性を考えると自然なことをいっているようにみえるよね。あともうひとつ、「観測量を固有状態で挟ん

だもの」は観測値だったけれど、「観測量を（任意の）状態で挟んだもの」はなにかというのが次の命題だよ。

命題 1.5.5　観測量 $\hat{a}$、規格化されたケット $|B\rangle$ について、

$$\langle B|\hat{a}|B\rangle = \sum_{\lambda} |c|^2 a_\lambda \langle a_\lambda|a_\lambda\rangle = \sum_{\lambda} a_\lambda P(a_\lambda)$$


つまり、「観測量を状態で挟んだもの」は観測値の期待値を表すの。


ちゃんと固有状態のときと整合しています…！


今はうまくいくように定式化した結果をみているだけだから、うまくいくのはある意味で当然なんだけど、でもやっぱりよくできているよね。


科学者達の努力のあとってことですね。


うん。じゃあ、最後に例を見て今日は終わりにしよっか。


はい……！！

例 1.5.6　1 量子ビット系を考える。つまり、ある観測量 $\hat{s}$ は固有値 ± 1 をもつ。固有値 1 に属する固有ケットを $|+\rangle$、固有値 -1 に属する固有ケットを $|-\rangle$ と書く。$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1$ である。
ケット $|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|+\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|-\rangle$ について考える。
$\hat{s}$ を観測したとき、1 である確率 P_+、-1 である確率 P_- は

$$P_+ = |\langle +|B\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \langle +|+\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} \langle +|-\rangle \right|^2 = \frac{1}{5}$$

$$P_- = |\langle -|B\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \langle -|+\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} \langle -|-\rangle \right|^2 = \frac{4}{5}$$

となる。また、$\hat{s}$ の期待値は

$$\langle B|\hat{s}|B\rangle = \frac{1}{5}\langle +|\hat{s}|+\rangle + \frac{4}{5}\langle -|\hat{s}|-\rangle = -\frac{3}{5}$$

である。

参考文献とあとがき

[1] Koi『ご注文はうさぎですか？ ④』（芳文社，2015）
[2] P.A.M. ディラック著、朝永振一郎、玉木英彦ほか訳『量子力學』原書第 4 版（岩波書店，1968）
[3] J.J.Sakurai 著、桜井明夫訳『現代の量子力学 (上)・(下)』（吉岡書店，1989）
[4] 石坂智、小川朋宏ほか『量子情報科学入門』（共立出版，2012）
[5] 猪木慶治、川合光『量子力学 I・II』（講談社，1994）
[6] 佐竹一郎『線型代数学』新装版（裳華房，2015）
[7] 松本幸夫『多様体の基礎』（東京大学出版会，1968）
[8] 朝永振一郎著、江沢洋編『量子力学と私』（岩波書店，1997）

このたびは、本書を手に取っていただき、ありがとうございます。

「なんでこんな本を書いたの？」と問われれば、[1] でココアちゃんが相対性理論を持ち出すシーンが登場して以来、物理学徒のあいだでごちうさが散々ネタにされてきたということをまず言わねばなりません。それで『ココアちゃんと学ぶ相対性理論』でもつくろうかという話を冗談交じりにしていたのですが、NF で即売会があるというので、「じゃあそれまでに書いてしまおう！」などということになり、そのまま勢いで申し込んでしまいました。が、私が相対性理論をきちんと理解できていないために計画は早くも頓挫しました。それで、量子力学なら慣れているし書ける気がする、と量子力学について書くことにしました。

この本は、主に「物理学をやっていない理系大学生」を対象として書きました。なので 1 回生で学ぶ程度の線型代数の知識は仮定してあります。というわけでこの本のチノちゃんもその程度の知識は持っているのですが、その辺りはどこか不思議なごちうさ世界ではそれくらいの教育が行われているということで納得してください。

世間に量子力学の教科書は数多あり、そのアプローチも様々あるのですが、この本はディラックの教科書 [2] の影響を強く受けています。というのも、私がディラックの教科書を好んでいるからです。大学の量子力学の入門講義では「前期量子論の歴史→シュレディンガー方程式→ポテンシャル中の粒子の振る舞いの計算」という順で進んでいったのですが、よく分からず、「何か教科書を買って勉強しよう」と考えて私はディラックの教科書を買いました。この本を選んだ理由は「昔から憧れていた」「旧字の本で雰囲気が良い」「ぱっとみて数値を用いた計算の問題が載っていなかった」といったところでしたが、読んでみるとやはりとても良い本でした。この本は波動方程式が最初に来るのではなく、「状態」や「観測」といった概念を丁寧に説明しつつブラケット記法を導入していきます。その中ではたくさんの仮定（公理）がでてくるのですが、「ここは〜であるから〜を仮定する」といちいち理由を説明してくれるのです。そんな訳で、この同人誌は、ディラックの本の面白さを手軽に味わえる「ふんわりした本」を目指して書きました。今のところ観測量の導入までで終わっていますが、できたらこの続きも書いていけたらなと思います。

さて、書く中で困ったのは、やはりというか、数学的な厳密さをどこまで考えるかといったことです。現代の量子力学は厳密な函数解析の理論の上に、公理論的に与えられています。そういうもののなかでは、ディラック流のブラケット記法の導入の際の「仮定」が、「ケットのなす空間は複素係数ヒルベルト空間である」「観測量は自己共軛作用素である」等々の主張の中に暗黙に含まれることになります。が、それを書いても物理的な意味がよくわかりませんし、そもそも私の理解が足りていませんから、そういうものはぜひ避けていきたいところです。しかし、

「嘘」になるような記述をするのはまずいです。ということで、いかに逃げるかということに神経を使った節があります。量子力学を理解している方は、どこで「逃げ」をしたかを考えつつ読んでいただけると楽しいかもしれません。

最後に、素敵な表紙イラスト・顔アイコンを描いてくださった Kata さん (twitter: @kataOcean)、その他（進捗を）支えて下さった方々に感謝を。ちなみに、このあとがきを書いている今は 2017 年 11 月 24 日午前 5 時、つまり即売会当日の朝です。一昨日徹夜で本文を書き上げたのですが、そのせいか昨日高熱を出しました。即売会に行くのを諦めかけましたが、なんとか体調が戻ってきたので行けそうです（この文章があなたの手にあるのなら、行けているのでしょう）。このとおり、急いで書き上げたものなので誤り等もあると思います。そういう場合は連絡を頂けると幸いです (e-mail: tamagawajousuiro@gmail.com)。また、正誤表などを上げる予定の読者ページも用意しますので、ぜひご覧ください（アドレス：https://巫.jp/readers/chino-qm-beta/、パスワード：20171124)。

神和電子　すずしめ拝

香風智乃の量子力學ノート　べーたばん

2017 年 11 月 24 日　初版第 1 刷発行
2017 年 12 月 30 日　初版第 2 刷発行

発行　神和電子
著　すずしめ
イラスト　Kata
印刷　ちょ古っ都製本工房

Web　https://巫.jp/